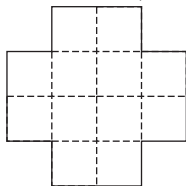


## ●Check! (p.602)

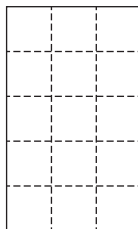
28

次の(1)~(3)の図形は、 $2 \times 1$ のドミノで敷き詰められるかどうか、それぞれ答えよ。

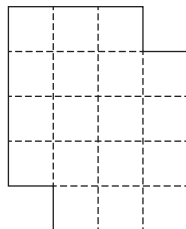
(1)



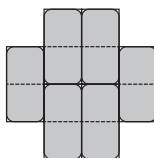
(2)



(3)



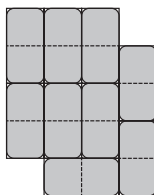
- (1) たとえば、右の図のように敷き詰められる。



- (2) ドミノを隙間なく重なりなく敷き詰めるとき、マス数は必ず偶数になる。

この図形のマス数は奇数であるから、ドミノで敷き詰めることはできない。

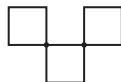
- (3) たとえば、右の図のように敷き詰められる。



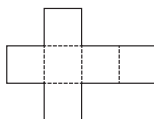
29

命題「ある図形のマス数が偶数個あるならば、その図形は $2 \times 1$ のドミノで敷き詰め可能である」は成り立つか答えよ。

ただし、ある図形のすべてのマスは必ず他のいずれかのマスと辺で接しているものとし、右の図のように頂点でのみ接しているマスはないものとする。



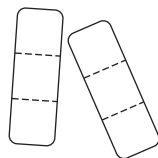
右の図形などが、反例となるので、命題「ある図形のマス数が偶数個あるならば、その図形はドミノで敷き詰め可能である」は成り立たない。



30

右の図のような $1 \times 1$ の正方形を直線状に3つ組合せてできる $3 \times 1$ のタイルをドミノとよぶことにする。

命題「与えられた図形がドミノで敷き詰め可能であるならば、その図形のマス数は3の倍数である」は成り立つか答えよ。



$1 \times 3$ のドミノを敷き詰めることができるならば、隣り合うマスが同色にならないように3色で塗り分けたときの各色の

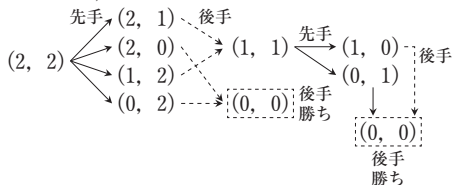
## 458 第9章 整数・数学と人間の活動

マス 수는同数であるので、命題「与えられた図形がドミノで敷き詰め可能であるならば、その図形のマス数は3の倍数である」は成り立つ。

31

2山石取りゲーム(2, 2)について、先手必勝か後手必勝かを答えよ。

2山石取りゲーム(2, 2)について、先手・後手の石の取り方を図で表すと、次の図ようになる。ただし、先手はすべての手を表示し、後手はうまく手を選ぶ場合を表示している。



この図より、2山石取りゲーム(2, 2)は後手必勝である。

32

2山石取りゲーム(5, 7)について、先手必勝か後手必勝かを答えよ。

2山石取りゲーム(5, 7)について、上の山の石が5個、下の山の石が7個と異なっているので、先手は初手で、上下山の石の個数を(5, 5)と同数にできる。このとき、後手がどのように石を取っても、上下山の石の個数は異なる状況となる。

次に先手は、再び上下山の石の個数を同数にできる。この手順を繰り返すことで、先手は最後の石を取ることができるから先手必勝である。

## ●練習

290

右の(ア)～(ケ)の空欄に1つずつ1～9の数字をすべて入れて、3つの式が成り立つようにしたい。まだどの空欄にも数字が入っていない段階で、数字の「9」が入る可能性がある空欄の候補を(ア)～(ケ)の中からすべて選び、その理由を述べよ。

$$\begin{array}{l} \boxed{\text{ア}} + \boxed{\text{イ}} = \boxed{\text{ウ}} \\ \boxed{\text{エ}} - \boxed{\text{オ}} = \boxed{\text{カ}} \\ \boxed{\text{キ}} \times \boxed{\text{ク}} = \boxed{\text{ケ}} \end{array}$$

1～8の数において、9にどの数を足しても2桁の数になるから、(ア)と(イ)には入らない。

同様に、9に1を掛けると9になり、9に2～8のどの数を掛けても2桁の数になるので、(キ)と(ク)にも入らない。

また、1～8のどの数から9を引いても、負の数になり、1～8の中から選んだ2数の差は7以下の数にしかならないので、(オ)と(カ)にも入らない。

さらに、 $9=3 \times 3$ であるから、(ケ)に入らない。

一方、 $4+5=9$ 、 $9-1=8$ などの式が成り立つので、どの空欄にも数字が入っていない段階では、(ウ)と(エ)には9が入る可能性がある。

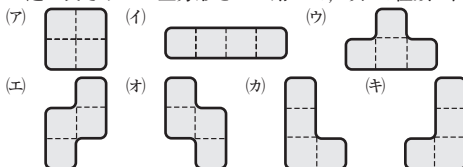
よって (ウ)と(エ)

◀ 「9」が入らない空欄を考えてみる。

◀ 3を2回使う。

291

1辺の長さが1の正方形を4つ用いて、次の7種類の図形を作る。



これらの図形のうち6種類を、回転させることを許して使うと、 $3 \times 8$ の長方形を敷き詰めることができる。

(1) (ア)～(キ)の中で使わない図形を1つ答えよ。

(2) (1)で答えた図形以外を少なくとも1回用いて  $3 \times 8$ の長方形を敷き詰めよ。

- (1) 7種類の図形はいずれも正方形4個できていて、 $3 \times 8$ の長方形は24個の正方形からできているので、6種類の図形を用いる場合、それぞれ1つずつ使用することになる。

7種類のすべての図形を白黒交互に塗ると、



となり、(ウ)の図形は黒3、白1、それ以外の図形は黒2、白2となっている。

一方、 $3 \times 8$ の長方形を白黒交互に塗ると、白12、黒12となる。

(ウ)以外の6種類を用いると、白12、黒12となるが、(ウ)とそれ以外の5種類を用いると白11、黒13となってしまう塗り分けられない。

よって、(ウ)

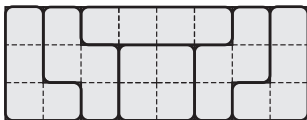
◀  $4 \times 6 = 24$



2個用いると白4、黒4になるが、残りの正方形が16個となり、使わない図形が2種類以上必要となる。

## 460 第9章 整数・数学と人間の活動

(2) (例)



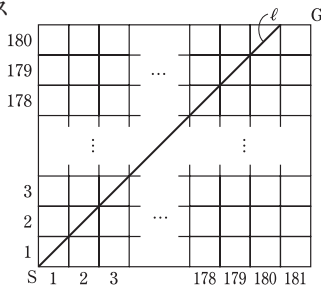
292

白石 180 個と黒石 181 個の合わせて 361 個の碁石が横に 1 列に並んでいる。碁石がどのように並んでいても、次の条件を満たす黒の碁石が少なくとも 1 つあることを示せ。その黒の碁石とそれより右にある碁石をすべて除くと、残りは白石と黒石が同数となる。ただし、碁石が 1 つも残らない場合も同数とみなす。

縦 180 マス×横 181 マス

の長方形において、左下の端を S、右上の端を G とする。

横 1 列に並んだ碁石を左から見ていくとき、白の碁石を上へ 1 マス進むこと、黒の碁石を右へ 1 マス進むことに対応させると、361 個の碁石の並び方は、S



から G までマスの辺上を通過して向かう最短経路に対応する。

S を頂点とする 縦 180 マス×横 180 マスの正方形において、S を含む対角線を  $\ell$  とすると、S から  $\ell$  上の点まで向かう最短経路を進むとき、上へ進んだマスの数と右へ進んだマスの数は等しくなる。

したがって、 $\ell$  上にある頂点から右へ 1 マス進む移動は、与えられた条件を満たす黒の碁石に対応する。

S は  $\ell$  上、G は  $\ell$  より右側にあるから、S から G まで向かう最短経路を進むとき、 $\ell$  上にある頂点から右へ 1 マス進む移動は、少なくとも 1 回ある。

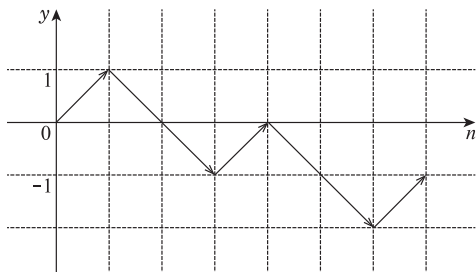
よって、条件を満たす黒の碁石は少なくとも 1 つある。

**別解** 並んでいる碁石を左端から順に見ていき、白石なら 1 点、黒石なら -1 点を加えることとする。1 番左が黒石なら、すべて取り除けばよいから、1 番左が白石であるときを考える。

図で 1 点加わることを  $\nearrow$ 、-1 点加わることを  $\searrow$  とする。

$$f(361) = 180 - 181 = -1$$

であるから、(1, 1) から (361, -1) まで推移するとき、横軸を少なくとも 1 回越えて、その後  $\searrow$  となる  $n$  が存在する。



この  $n$  から右のすべてを取り除くと白石と黒石の数は同数である。

注 上の図は、



と並んでいる例で、このときは  $n=3$  が条件を満たしているから、3番目から右を除くことになる。

293

2種類のカードがあり、それぞれ「3」、「5」と書かれている。これらのカードはたくさんある。これらのカードを何枚か取り出して、そのカードに書かれた数字を足して1つの数にするというゲームを行う。ただし、使わないカードがあってもよいものとする。このとき、この2種類のカードでは表すことができない自然数をすべて答えよ。

3のカードを  $m$  枚、5のカードを  $n$  枚取り出したとすると、 $3m+5n$  と表すことができる。これに、 $n=0, 1, 2$  を代入する。

(i)  $n=0$  のとき

$3m$  となる。

$m \geq 0$  より、3の倍数である。

つまり、3から始まり、3を順々に加えてできる数で、  
3, 6, 9, 12, ……

(ii)  $n=1$  のとき

$3m+5=3(m+1)+2$  となる。

$m \geq 0$  より、5以上で、3の倍数に2を加えた整数である。

つまり、5から始まり、3を順々に加えてできる数で、  
5, 8, 11, 14, ……

(iii)  $n=2$  のとき

$3m+10=3(m+3)+1$  となる。

$m \geq 0$  より、10以上で、3の倍数に1を加えた整数である。

つまり、10から始まり、3を順々に加えてできる数で、  
10, 13, 16, 19, ……

(i)~(iii)より、 $n=0, 1, 2$  のとき、 $3m+5n$  と表せない自然数は、1, 2, 4, 7

また、 $n \geq 3$  のとき、 $3m+5n \geq 3 \times 0 + 5 \times 3 = 15 > 7$  より、 $n \geq 3$  のときは7以下の自然数を表せない。

よって、求める自然数は、1, 2, 4, 7

◀  $m$  の係数が3、 $n$  の係数が5であることから、まず  $n=0, 1, 2$  のときを調べる。

◀ 正の3の倍数をすべて含んでいる。

◀ 2を表せない。

◀ 1, 4, 7を表せない。

◀ 1, 2, 4, 7以外の自然数はすべて表せる。

## ● 章末問題 (p.614)

1

自然数 504 について、次の問いに答えよ。

- (1) 504 を素因数分解せよ。また、正の約数の総和を求めよ。  
 (2) 504 以下の自然数で、504 と互いに素な数はいくつあるか答えよ。  
 (3) 504 以下の自然数で、504 と互いに素な数の総和を求めよ。

(1)  $504 = 2^3 \times 3^2 \times 7$

したがって、504 の正の約数の総和は、

$$(1+2+2^2+2^3)(1+3+3^2)(1+7) \\ = 15 \times 13 \times 8 = 1560$$

(2) 504 は素因数に 2 と 3 と 7 をもつ。

504 以下の自然数のうち、

2 の倍数は、 $504 = 2 \times 252$  より、252 個

3 の倍数は、 $504 = 3 \times 168$  より、168 個

7 の倍数は、 $504 = 7 \times 72$  より、72 個

6 の倍数は、 $504 = 6 \times 84$  より、84 個

21 の倍数は、 $504 = 21 \times 24$  より、24 個

14 の倍数は、 $504 = 14 \times 36$  より、36 個

42 の倍数は、 $504 = 42 \times 12$  より、12 個

したがって、504 以下の自然数で、504 と互いに素でないものの個数は、

$$252 + 168 + 72 - 84 - 24 - 36 + 12 = 360 \text{ (個)}$$

よって、504 以下の自然数で、504 と互いに素な数は、

$$504 - 360 = 144 \text{ (個)}$$

(3) 504 以下の自然数で、504 と互いに素な数は、

$$1, 5, 11, 13, \dots, 491, 493, 499, 503$$

の 144 個ある。

ここで、504 以下の自然数の 1 つを  $n$  とすると、 $n$  が 504 と互いに素のとき、 $504 - n$  は 504 と互いに素である。

したがって、504 以下の自然数で、504 と互いに素な数は、和が 504 となる 2 数の組に分けることができ、その組は全部で、

$$144 \div 2 = 72 \text{ (組)}$$

よって、504 以下の自然数で、504 と互いに素な数の総和は、

$$504 \times 72 = 36288$$

◀ 2 と 3 の最小公倍数

◀ 3 と 7 の最小公倍数

◀ 2 と 7 の最小公倍数

◀ 2 と 3 と 7 の最小公倍数

◀  $n(A \cup B \cup C)$

$$= n(A) + n(B) + n(C)$$

$$- n(A \cap B) - n(B \cap C)$$

$$- n(C \cap A) + n(A \cap B \cap C)$$

◀  $n(\bar{A}) = n(U) - n(A)$

◀  $1 + 503 = 504$

$$5 + 499 = 504$$

$$11 + 493 = 504$$

⋮

となっている点に着目する。

◀ 例題 258 (本編 p.534) と同様にして、 $504 - n$  は 504 と互いに素であることを証明できる。

2

 $2 \leq p < q < r$  を満たす整数  $p, q, r$  の組で、 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} \geq 1$  となるものをすべて求めよ。

$$2 \leq p < q < r \text{ より, } \frac{1}{r} < \frac{1}{q} < \frac{1}{p} \leq \frac{1}{2}$$

また、 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} \geq 1$  より、

$$1 \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} < \frac{1}{p} + \frac{1}{p} + \frac{1}{p}$$

したがって、 $1 < \frac{3}{p}$  より、 $p < 3$

これと  $p \geq 2$  より、 $2 \leq p < 3$  であり、 $p$  は整数であるか

◀ 文字の大小関係をうまく利用する。

ら,  $p=2$

$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} \geq 1$  より,  $\frac{1}{q} + \frac{1}{r} \geq 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$  であるから,

$$\frac{1}{2} \leq \frac{1}{q} + \frac{1}{r} < \frac{1}{q} + \frac{1}{q}$$

したがって,  $\frac{1}{2} < \frac{2}{q}$  より,  $q < 4$

これと  $p < q$  より,  $2 < q < 4$  であり,  $q$  は整数であるから,  $q=3$

$\frac{1}{q} + \frac{1}{r} \geq \frac{1}{2}$  より,  $\frac{1}{r} \geq \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$  であるから,  $r \leq 6$

これと  $q < r$  より,  $3 < r \leq 6$  であり,  $r$  は整数であるから,  $r=4, 5, 6$

よって,

$$(p, q, r) = (2, 3, 4), (2, 3, 5), (2, 3, 6)$$

3

$\frac{2p-1}{q}$ ,  $\frac{2q-1}{p}$  がともに整数のとき, 整数  $p, q$  の組を求めよ. ただし,  $p > q > 1$  とする.

$p > q > 1$  より,  $2q-1 > 0$  であるから,

$$\frac{2q-1}{p} < \frac{2q-1}{q} < \frac{2q}{q} = 2$$

また,  $\frac{2q-1}{p} > 0$

したがって,  $0 < \frac{2q-1}{p} < 2$  となり,  $\frac{2q-1}{p}$  が整数となるとき,

$$\frac{2q-1}{p} = 1$$

このとき,  $p = 2q-1$  より,

$$\frac{2p-1}{q} = \frac{2(2q-1)-1}{q} = \frac{4q-3}{q} = 4 - \frac{3}{q}$$

したがって,  $\frac{2p-1}{q}$  が整数となるのは,  $\frac{3}{q}$  が整数となるときであり,  $q > 1$  より,  $q=3$

このとき,  $p = 2 \times 3 - 1 = 5$

よって,  $(p, q) = (5, 3)$

◀与えられた条件から,  $\frac{2q-1}{p}$  の値の範囲を絞る.

◀分母  $q$  が分子 3 の約数のとき

4

整数  $\ell, m, n$  について, 連立方程式

$$7\ell = 4m + 3 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}, \quad \ell m = 139 - 28n^2 + \ell + m \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

が成り立つとき, 次の問いに答えよ.

(1)  $\textcircled{1}$ ,  $\textcircled{2}$  を満たす整数の組  $(\ell, m, n)$  は全部で何通りあるか.

(2)  $\textcircled{1}$  の整数の組  $(\ell, m, n)$  のうち,  $\ell, m, n$  のすべてが正であるものを求めよ.

(1)  $\textcircled{1}$  の整数解の 1 つは,  $\ell=1, m=1$  であるから,

$$7 \times 1 = 4 \times 1 + 3 \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

$$\textcircled{1} - \textcircled{3} \text{ より, } 7(\ell-1) = 4(m-1) \quad \cdots \cdots \textcircled{4}$$

7 と 4 は互いに素であるから,  $\ell-1$  は 4 の倍数となり,  $k$  を整数として,

$$\ell-1 = 4k, \text{ すなわち, } \ell = 4k+1$$

$$\text{これを}\textcircled{4}\text{に代入すると, } 7 \times 4k = 4(m-1)$$

# 464 第9章 整数・数学と人間の活動

$$7k = m - 1 \text{ より, } m = 7k + 1$$

したがって,

$$\ell = 4k + 1, m = 7k + 1 \text{ (} k \text{ は整数)} \dots\dots ⑤$$

⑤を②に代入すると,

$$(4k + 1)(7k + 1) = 139 - 28n^2 + (4k + 1) + (7k + 1)$$

整理すると,  $28n^2 = 140 - 28k^2$  より,  $n^2 = 5 - k^2$

$n^2 \geq 0$  より,  $5 - k^2 \geq 0$  であるから,  $k^2 \leq 5$

これと  $k^2 \geq 0$  より,  $0 \leq k^2 \leq 5$

$k$  は整数より,  $k^2 = 0, 1, 4$

$k^2 = 0$ , すなわち,  $k = 0$  のとき,  $n^2 = 5$  となり,  $n$  は整数にならない.

$k^2 = 1$ , すなわち,  $k = \pm 1$  のとき,  $n^2 = 4$  より,

$$n = \pm 2$$

$k^2 = 4$ , すなわち,  $k = \pm 2$  のとき,  $n^2 = 1$  より,

$$n = \pm 1$$

これより,  $k = \pm 1, \pm 2$  のとき,  $k$  の値が1つ定まると, 整数  $\ell, m$  の値は1つずつ定まり, 整数  $n$  の値は2つずつ定まる.

よって, ①, ②を満たす整数の組  $(\ell, m, n)$  は, 全部で,

$$4 \times 2 = 8 \text{ (通り)}$$

- (2)  $k = -1, -2$  のとき, ⑤より,  $\ell < 0, m < 0$

$k = 1$  のとき, ⑤より,  $\ell = 5, m = 8$  で,  $n > 0$  より,

$$n = 2$$

$k = 2$  のとき, ⑤より,  $\ell = 9, m = 15$  で,  $n > 0$  より,

$$n = 1$$

よって,  $\ell, m, n$  のすべてが正となる組は,

$$(\ell, m, n) = (5, 8, 2), (9, 15, 1)$$

◀ ①の一般解を②に代入する.

◀  $n, k$  は整数, すなわち, 実数より,  $n^2 \geq 0, k^2 \geq 0$

◀ 積の法則

5

(1) 素数  $p$  と  $1 \leq r \leq p-1$  なる整数  $r$  に対して, 等式  $r_p C_r = p_{p-1} C_{r-1}$  を証明し,  $_p C_r$  は  $p$  の倍数であることを示せ.

(2) 素数  $p$  に対して  $2^p$  を  $p$  で割った余りを求めよ. ただし,

$$(a+b)^n = {}_n C_0 a^n + {}_n C_1 a^{n-1} b + {}_n C_2 a^{n-2} b^2 + \dots\dots$$

$$+ {}_n C_r a^{n-r} b^r + \dots\dots + {}_n C_{n-1} a b^{n-1} + {}_n C_n b^n$$

であることを用いてもよい.

$$(1) \quad r_p C_r = r \cdot \frac{p!}{r!(p-r)!} = r \cdot \frac{p \cdot (p-1)!}{r \cdot (r-1)! \{(p-1)-(r-1)\}!}$$

$$= p \cdot \frac{(p-1)!}{(r-1)! \{(p-1)-(r-1)\}!} = p_{p-1} C_{r-1}$$

よって,  $r_p C_r = p_{p-1} C_{r-1}$  は成り立つ.

また,  $r_p C_r = p_{p-1} C_{r-1}$  において,  $_p C_r, _{p-1} C_{r-1}$  は整数である.

$p$  は素数で,  $r$  は  $1 \leq r \leq p-1$  を満たす整数であるから,  $p$  と  $r$  は互いに素である.

よって,  $_p C_r$  は  $p$  の倍数である.

$$(2) \quad 2^p = (1+1)^p$$

$$= {}_p C_0 \cdot 1^p + {}_p C_1 \cdot 1^{p-1} \cdot 1 + {}_p C_2 \cdot 1^{p-2} \cdot 1^2 + \dots\dots$$

$$\dots\dots + {}_p C_{p-1} \cdot 1 \cdot 1^{p-1} + {}_p C_p \cdot 1^p$$

$$= {}_p C_0 + {}_p C_1 + {}_p C_2 + \dots\dots + {}_p C_{p-1} + {}_p C_p$$

$$\leftarrow {}_n C_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

◀ 与えられた関係式において,  $n = p, a = b = 1$  を代入



(1)より、素数 $p$ に対し、 $r$ が整数で $1 \leq r \leq p-1$  のとき、 ${}_pC_r$  は $p$ の倍数である。

したがって、 ${}_pC_1 + {}_pC_2 + \cdots + {}_pC_{p-1}$  は $p$ の倍数となるから、これを $kp$  ( $k$ は整数) とおくと、

$$2^p = kp + {}_pC_0 + {}_pC_p = kp + 1 + 1 = kp + 2$$

したがって、 $p \geq 3$  のとき、 $2^p$  を $p$ で割った余りは、  
2

また、 $p=2$  のとき、 $2^p=2^2$  より、 $2^p$  を $p$ で割った余りは、 0

よって、 $2^p$  を $p$ で割った余りは、

$$p=2 \text{ のとき, } 0$$

$$p \geq 3 \text{ のとき, } 2$$

6

$x$ が正の数であるとき、 $[x]$ は小数点以下を切り捨ててできる整数とする。方程式  
 $x - [x] = x^2 - [x^2]$ の解で、 $0 < x < 2$ の範囲にあるものを求めよ。

$$[x] = \begin{cases} 0 & (0 < x < 1) \\ 1 & (1 \leq x < 2) \end{cases}$$

$$[x^2] = \begin{cases} 0 & (0 < x < 1) \\ 1 & (1 \leq x < \sqrt{2}) \\ 2 & (\sqrt{2} \leq x < \sqrt{3}) \\ 3 & (\sqrt{3} \leq x < 2) \end{cases}$$

より、

(i)  $0 < x < 1$  のとき、

$$x - 0 = x^2 - 0$$

$$x^2 - x = 0$$

$$x(x-1) = 0$$

したがって、 $x=0, 1$  (不適)

(ii)  $1 \leq x < \sqrt{2}$  のとき、

$$x - 1 = x^2 - 1$$

$$x^2 - x = 0$$

$$x(x-1) = 0$$

したがって、 $x=0, 1$

条件に適するのは、 $x=1$

(iii)  $\sqrt{2} \leq x < \sqrt{3}$  のとき、

$$x - 1 = x^2 - 2$$

$$x^2 - x - 1 = 0$$

したがって、

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

条件に適するのは、 $x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$

(iv)  $\sqrt{3} \leq x < 2$  のとき、

$$x - 1 = x^2 - 3$$

$$x^2 - x - 2 = 0$$

$$(x+1)(x-2) = 0$$

したがって、 $x=-1, 2$  (不適)

よって、(i)~(iv)より、 $x=1, \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

◀  $0 < x < 1$  を満たさない。

◀  $1 \leq x < \sqrt{2}$

◀ 解の公式を利用

◀  $\sqrt{2} < x < \sqrt{3}$

◀  $\sqrt{2} < \frac{1+\sqrt{5}}{2} < \sqrt{3}$

◀  $\sqrt{3} \leq x < 2$  を満たさない。

実数  $x$  に対して、その整数部分を  $[x]$  で表す。すなわち  $[x]$  は不等式  $[x] \leq x < [x] + 1$  を満たす整数である。

(1) 実数  $x$  に対して、等式  $[x] + \left[x + \frac{1}{3}\right] + \left[x + \frac{2}{3}\right] = [3x]$  を示せ。

(2) 正の整数  $n$ 、実数  $x$  に対して、等式

$$[x] + \left[x + \frac{1}{n}\right] + \left[x + \frac{2}{n}\right] + \cdots + \left[x + \frac{n-1}{n}\right] = [nx] \text{ を示せ。}$$

(1) 等式  $[x] + \left[x + \frac{1}{3}\right] + \left[x + \frac{2}{3}\right] = [3x]$  ……① を示す。

$$[3x] \leq 3x < [3x] + 1 \text{ より、}$$

$$\frac{[3x]}{3} \leq x < \frac{[3x] + 1}{3} \text{ ……②}$$

$[3x]$  は整数であるから、 $[3x]$  は、 $3k, 3k+1, 3k+2$  ( $k$  は整数) のいずれかで表される。

したがって、

$$[3x] = 3k + r \quad (r=0, 1, 2) \text{ ……③}$$

とすると、②より、 $k + \frac{r}{3} \leq x < k + \frac{r+1}{3}$

(i)  $r=0$  のとき

$$k \leq x < k + \frac{1}{3} \text{ より、} [x] = k$$

$$k + \frac{1}{3} \leq x + \frac{1}{3} < k + \frac{2}{3} \text{ より、} \left[x + \frac{1}{3}\right] = k$$

$$k + \frac{2}{3} \leq x + \frac{2}{3} < k + 1 \text{ より、} \left[x + \frac{2}{3}\right] = k$$

$$\text{したがって、} [x] + \left[x + \frac{1}{3}\right] + \left[x + \frac{2}{3}\right] = 3k$$

$$\text{また、③より、} [3x] = 3k$$

よって、等式①は成り立つ。

(ii)  $r=1$  のとき

$$k + \frac{1}{3} \leq x < k + \frac{2}{3} \text{ より、} [x] = k$$

$$k + \frac{2}{3} \leq x + \frac{1}{3} < k + 1 \text{ より、} \left[x + \frac{1}{3}\right] = k$$

$$k + 1 \leq x + \frac{2}{3} < k + \frac{4}{3} \text{ より、} \left[x + \frac{2}{3}\right] = k + 1$$

$$\text{したがって、} [x] + \left[x + \frac{1}{3}\right] + \left[x + \frac{2}{3}\right] = 3k + 1$$

$$\text{また、③より、} [3x] = 3k + 1$$

よって、等式①は成り立つ。

(iii)  $r=2$  のとき

$$k + \frac{2}{3} \leq x < k + 1 \text{ より、} [x] = k$$

$$k + 1 \leq x + \frac{1}{3} < k + \frac{4}{3} \text{ より、} \left[x + \frac{1}{3}\right] = k + 1$$

$$k + \frac{4}{3} \leq x + \frac{2}{3} < k + \frac{5}{3} \text{ より、} \left[x + \frac{2}{3}\right] = k + 1$$

$$\text{したがって、} [x] + \left[x + \frac{1}{3}\right] + \left[x + \frac{2}{3}\right] = 3k + 2$$

$$\text{また、③より、} [3x] = 3k + 2$$

◀  $[3x]$  を 3 で割ったときの余りに着目して場合分けを行う。

よって、等式①は成り立つ。

(i)~(iii)より、すべての実数  $x$  に対して、等式①は成り立つ。

(2)  $[nx] \leq nx < [nx] + 1$  より、

$$\frac{[nx]}{n} \leq x < \frac{[nx] + 1}{n} \quad \dots\dots ①$$

$[nx]$  は整数であるから、 $[nx]$  は、 $nk, nk+1, nk+2, \dots, nk+n-1$  ( $k$  は整数) のいずれかで表される。

したがって、

$$[nx] = nk + r \quad (r=0, 1, 2, \dots, n-1) \quad \dots\dots ②$$

とすると、①より、 $k + \frac{r}{n} \leq x < k + \frac{r+1}{n} \quad \dots\dots ③$

ここで、 $m=0, 1, 2, \dots, n-1$  として、③の各辺に  $\frac{m}{n}$  を加えると、

$$k + \frac{m+r}{n} \leq x + \frac{m}{n} < k + \frac{m+r+1}{n}$$

$$\frac{m+r+1}{n} \leq 1, \text{ すなわち, } 0 \leq m \leq n-r-1 \text{ のとき,}$$

$$k \leq k + \frac{m+r}{n} \leq x + \frac{m}{n} < k + \frac{m+r+1}{n} \leq k+1$$

$$\text{より, } \left[ x + \frac{m}{n} \right] = k$$

$$\frac{m+r}{n} \geq 1, \text{ すなわち, } n-r \leq m \leq n-1 \text{ のとき,}$$

$$k+1 \leq k + \frac{m+r}{n} \leq x + \frac{m}{n} < k + \frac{m+r+1}{n} < k+2$$

$$\text{より, } \left[ x + \frac{m}{n} \right] = k+1$$

したがって、

$$\begin{aligned} & [x] + \left[ x + \frac{1}{n} \right] + \left[ x + \frac{2}{n} \right] + \dots\dots \\ & \dots\dots + \left[ x + \frac{n-r-1}{n} \right] + \left[ x + \frac{n-r}{n} \right] + \dots\dots \\ & \dots\dots + \left[ x + \frac{n-1}{n} \right] \end{aligned}$$

$$= (n-r)k + r(k+1) = nk + r$$

$$\text{また, ②より, } [nx] = nk + r$$

よって、等式

$$[x] + \left[ x + \frac{1}{n} \right] + \left[ x + \frac{2}{n} \right] + \dots\dots + \left[ x + \frac{n-1}{n} \right] = [nx]$$

は成り立つ。

⑨ (1)において、 $m=0, 1, 2$  として、

$$k + \frac{m+r}{3} \leq x + \frac{m}{3} < k + \frac{m+r+1}{3} \text{ のときの } \left[ x + \frac{m}{3} \right]$$

の値に着目すると、

$$\frac{m+r+1}{3} \leq 1 \text{ のとき, } \left[ x + \frac{m}{3} \right] = k$$

$$\frac{m+r}{3} \geq 1 \text{ のとき, } \left[ x + \frac{m}{3} \right] = k+1$$

◀  $r=0$  のときは、これを満たす  $m$  の値はない。

◀  $k$  となるのは、 $[x], \dots, \left[ x + \frac{n-r-1}{n} \right]$  の  $(n-r)$  個  
 $k+1$  となるのは、 $\left[ x + \frac{n-r}{n} \right], \dots, \left[ x + \frac{n-1}{n} \right]$  の  $r$  個

# 468 第9章 整数・数学と人間の活動

となっているので、(2)では、これを3から $n$ に拡張し、  
 $\left[x + \frac{m}{n}\right]$ の値が、 $k$ となるもの、 $k+1$ となるもののそ  
 れぞれの個数について考える。

8

3次方程式  $x^3 - x^2 + 2x - 1 = 0$  の実数解は無理数であることを証明せよ。

3次方程式  $x^3 - x^2 + 2x - 1 = 0$  ……① が有理数の解を  
 もつと仮定すると、その解は、

$$x = \frac{n}{m} \quad (m \text{ と } n \text{ は互いに素な整数で, } m \geq 1)$$

と表される。

$x = \frac{n}{m}$  が①の解のとき、

$$\left(\frac{n}{m}\right)^3 - \left(\frac{n}{m}\right)^2 + 2 \cdot \frac{n}{m} - 1 = 0$$

両辺に  $m^2$  を掛けると、

$$\frac{n^3}{m} - n^2 + 2mn - m^2 = 0$$

$$\frac{n^3}{m} = n^2 - 2mn + m^2 \quad \dots\dots②$$

$m, n$  は整数であるから、 $n^2 - 2mn + m^2$  は整数である。

したがって、②より、 $\frac{n^3}{m}$  は整数である。

$m$  と  $n$  は互いに素な整数で、 $m \geq 1$  より、 $\frac{n^3}{m}$  が整数のと  
 き、 $m = 1$

これを②に代入すると、 $n^3 = n^2 - 2n + 1$

$$n^3 - n^2 + 2n = 1 \text{ より, } n(n^2 - n + 2) = 1 \quad \dots\dots③$$

$n$  は整数であるから、③が成り立つのは、

$$\begin{cases} n=1 \\ n^2 - n + 2 = 1 \end{cases} \text{ または } \begin{cases} n=-1 \\ n^2 - n + 2 = -1 \end{cases}$$

$n=1$  のとき、 $n^2 - n + 2 = 1^2 - 1 + 2 = 2$  より、 $n$  と  
 $n^2 - n + 2$  は同時に1にはならない。

$n=-1$  のとき、 $n^2 - n + 2 = (-1)^2 - (-1) + 2 = 4$  より、 $n$   
 と  $n^2 - n + 2$  は同時に-1にはならない。

したがって、①を満たす有理数の解  $x = \frac{n}{m}$  が存在せず、  
 矛盾する。

よって、①の実数解は有理数の解ではない、すなわち、①  
 の実数解は無理数である。

◀ 背理法で示す。

## ●思考力問題

9

$x$  座標,  $y$  座標がともに有理数である点を有理点とよぶ. 円  $x^2+y^2=3$  上に有理点は存在しないことを示したい.

- (1)  $a, b$  は整数,  $r$  は 0 でない整数として, 有理点  $\left(\frac{a}{r}, \frac{b}{r}\right)$  が円  $x^2+y^2=3$  上にあるならば,  $a, b$  はともに 3 の倍数であることを示せ.  
 (2) 円  $x^2+y^2=3$  上に有理点は存在しないことを示せ.

- (1) 有理点  $\left(\frac{a}{r}, \frac{b}{r}\right)$  が円  $x^2+y^2=3$  上に存在するとき,

$$\left(\frac{a}{r}\right)^2 + \left(\frac{b}{r}\right)^2 = 3$$

$$a^2 + b^2 = 3r^2 \quad \dots\dots ①$$

したがって,  $a^2+b^2$  は 3 の倍数である.

ここで,  $m$  を整数とすると,

$$m \equiv 0, \pm 1 \pmod{3}$$

のいずれかであるから,

$$m \equiv 0 \text{ のとき, } m^2 \equiv 0 \pmod{3}$$

$$m \equiv \pm 1 \text{ のとき, } m^2 \equiv 1 \pmod{3}$$

よって,  $a^2+b^2$  が 3 の倍数のとき,

$$a^2+b^2 \equiv 0 \pmod{3}, \text{ すなわち,}$$

$$a \equiv b \equiv 0 \pmod{3}$$

となるから,  $a, b$  はともに 3 の倍数である.

- (2) 円  $x^2+y^2=3$  上に有理点  $\left(\frac{a}{r}, \frac{b}{r}\right)$  が存在すると仮定すると, (1)より,  $a=3a_1, b=3b_1$  ( $a_1, b_1$  は整数) とおける.

①に代入して,

$$(3a_1)^2 + (3b_1)^2 = 3r^2$$

$$3(a_1^2 + b_1^2) = r^2 \quad \dots\dots ②$$

したがって,  $r^2$  は 3 の倍数である.

すなわち,  $r$  は 3 の倍数であるから,

$$r = 3r_1 \text{ (} r_1 \text{ は 0 以外の整数)}$$

これを②に代入すると,

$$3(a_1^2 + b_1^2) = 9r_1^2$$

$$a_1^2 + b_1^2 = 3r_1^2$$

(1)と同様に,  $a_1, b_1$  は 3 の倍数であることが示され, さらに,  $r_1$  が 3 の倍数であることが示される.

したがって,  $a_1=3a_2, b_1=3b_2, r_1=3r_2$

( $a_2, b_2$  は整数,  $r_2$  は 0 でない整数)

と表せる.

これを続けていくと,  $a, b, r$  は何回でも 3 で割ることができ,  $r \neq 0$  であることに矛盾する.

よって, 円  $x^2+y^2=3$  上に有理点は存在しない.

◀ (右辺)=(3の倍数)より,  
(左辺)=(3の倍数)

◀  $m=3k, 3k \pm 1$   
( $k$  は整数)

◀ (左辺)=(3の倍数)より,  
(右辺)=(3の倍数)

◀ 無限に割り続けることができ  
る。(無限降下法)

円周上に  $m$  個の赤い点と  $n$  個の青い点を任意の順序に並べる。これらの点により、円周は  $m+n$  個の弧に分けられる。このとき、これらの弧のうち両端の点の色が異なるものの数は偶数であることを証明せよ。ただし、 $m \geq 1, n \geq 1$  であるとする。

＜考え方＞ いきなり一般的に考えても手をつけにくい。こういうときは具体的な数などで実験してみるとよい。ただし、証明につながるように実験しないといけないから、両端の色が異なる弧を数えるだけでは方針は見抜きにくいだろう。

$m=2, n=2$  とする。次のように点を並べてみる。

まず、赤い点を1つ置く。両端の色が異なる弧は増えない。(図a)

次に青い点を1つ置く。両端の色が異なる弧は2つ増える。(図b)

次に青い点を1つ置く。両端の色が異なる弧は増えない。(図c)

最後に赤い点を1つ置く。両端の色が異なる弧は2つ増える。(図d)

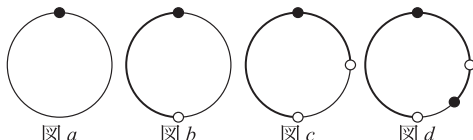


図 a

図 b

図 c

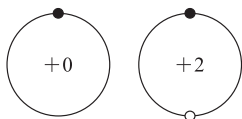
図 d

他の並べ方も考えてみて、特徴を見つけることが大切である。

両端の点の色が異なる弧を  $K_1$ 、両端の点の色が同じ弧を  $K_2$  とする。円周に点を1つずつ任意に置いて、合計  $m+n$  個配置する。

1つ目の点を置いても  $K$  は増えない。

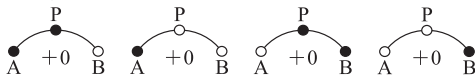
2つ目の点が1つ目のと同じ色であれば  $K$  は増えず、異なる色であれば  $K$  は2個増える。



1つの弧に注目すると、それは  $K_1, K_2$  のいずれかである。

(ア)  $K_1$  のとき

$K_1$  である1つの弧に新たに点  $P$  を置く。  $K_1$  の両端の点を  $A, B$  とする。



(ABの間に赤、青いずれの点を置いても  $K_2$  は増えない。

(イ)  $K_2$  のとき

$A, B, P$  は(ア)と同様である。



(ABの間に  $A, B$  と同じ色の点を置いても  $K_2$  は増えず、  $A, B$  と異なる色の点を置くとも  $K_2$  は2つ増える。

(ア), (イ)より、どのように点を置いても、  $K$  の増え方は0, 2のいずれかである。

したがって、  $K$  の増え方は偶数であるから示された。

**別解** ある赤球(赤い点)をスタート地点として円周を左

回りに見ていったとき、両端の球の色が異なる弧(以下では異色弧とよぶ)があるまでは赤球が続く、その弧を越えると次に異色弧があるまでは青球が続く、またその弧を越えると赤球が続く。よって、異色弧を境にして赤球列と青球列が交互に並び、スタート地点からみて、異色弧を偶数個越えたところでは赤球列が、奇数個越えたところでは青球列が並ぶ。1周してスタート地点の赤球に戻ってきたときに、異色弧を偶数個越えた赤球列の並ぶところではなくてはならないので、異色弧の個数は偶数である。